平坦态射

以下总假定A为含幺交换环.

定义：称A-模M为平坦的，如果对任意A-模正合列

$0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$，均有 $0\to M_1\otimes_A M\to M_2\otimes_A M\to M_3\otimes_A M\to 0$

为正合列.

性质1：A-模M为平坦的 $\Leftrightarrow$ 对任意A-模单同态 $0\to M_1\to M_2$

均有 $M_1\otimes_A M\to M_2\otimes_A M$ 为单同态

$\Leftrightarrow$ 对任意A中理想I，自然同态 $I\otimes_A M\to A\otimes_A M = M$

为单同态

$\Leftrightarrow$ 对A中任意素理想 p，M_p 为平坦 A_p-模

$\Leftrightarrow$ 对A中任意极大理想 m，M_m 为平坦 A_m-模.

证：R Matsumura《Commutative Ring Theory》Chap.3, Section 7.

定义：设 $A\xrightarrow{\varphi}B$ 为环同态，称 φ 为平坦的，如果通过 φ，B成为平坦A-模.

性质2：环同态 $\varphi: A\to B$ 为平坦的 $\Leftrightarrow$ 对任意B中素理想 p，记 $q=\varphi^{-1}(p)$，则 B_p 为平坦 A_q-模

$\Leftrightarrow$ 对任意B中极大理想 m，记 $q=\varphi^{-1}(m)$，则 B_m 为平坦 A_q-模.

证：~~利用性质1即得.~~ 设 p 为B中素理想，$q=\varphi^{-1}(p)$，则对A-模M，有同构 $B_p\otimes_B(B\otimes_A M)\simeq B_p\otimes_A M\simeq B_p\otimes_{A_q}A_q\otimes_A M$

$\simeq B_p\otimes_{A_q}M_q$，由此不难证明性质2.

性质3：设 $(A,m) \xrightarrow{\varphi} (B,n)$ 为局部环间的局部同态，并且设 φ 为平坦的，则有：

(1) 对任意 A-模 M，若 $M \neq 0$，则 $B \otimes_A M \neq 0$

(2) 任一 A-模复形 $M_1 \to M_2 \to M_3$ 为短正合列 $\Leftrightarrow$ $M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B \to M_3 \otimes_A B$ 为短正合列

(3) 对任意 A 中素理想 p，存在 B 中素理想 q，使得 $\varphi^{-1}(q) = p$.

证：(1) 由于 $M \neq 0$，取 $0 \neq x \in M$. 记 $I = \{ a \in A \mid ax = 0 \}$

则有单同态
$$\begin{array}{ccc} A/I & \hookrightarrow & M \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \bar{a} & \longmapsto & a \cdot x \end{array}$$
并且 $I \subset m$.

从而由 B 为平坦 A-模知有单同态 $A/I \otimes_A B \hookrightarrow M \otimes_A B$

由于 $A/I \otimes_A B \simeq B/IB$，以及 $I \subset m$，$\varphi(m) \subset n$

知 $IB \subset n$. 从而 $B/IB \neq 0$. 故 $B \otimes_A M \simeq M \otimes_A B \neq 0$.

(2) 由(1)不难证明.

(3) 记 $\kappa(p) = \frac{A_p}{pA_p}$ 为 p 处的剩余类域 (residue field).

则 $\{ q \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(q) = p \}$ 与集合 $\operatorname{Spec} \kappa(p) \otimes_A B$ 之间存在双射. 由(1)知 ~~$\kappa(p) \otimes_A B$~~ $\operatorname{Spec} \kappa(p) \otimes_A B$ 非空，故知 $\{ q \in \operatorname{Spec} B \mid \varphi^{-1}(q) = p \}$ 非空. #

性质4：设 $(A,m) \xrightarrow{\varphi} (B,n)$ 为 Noether 局部环之间的局部同态，并设 φ 为平坦的，则有

$$\dim A + \dim B/mB = \dim B.$$

证：由于 $\dim A = \min\{ l \mid$ 存在 $x_1,\cdots,x_l \in m$，以及存在 k 为正整数，使得 $m^k \subset (x_1,\cdots,x_l) \}$

不难看到 $\dim A + \dim B/mB \geq \dim B$.

下面证明 $\dim A + \dim B/mB \leq \dim B$.

为此，记 $k_1 = \dim A$，$k_2 = \dim B/mB$.

取 A 中素理想链 $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_{k_1} = m$.

取 B 中素理想链 $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_{k_2} = n$

并且有 $mB \subseteq q_0$.

这样知 $\forall i$，$\varphi^{-1}(q_i) = m = p_{k_1}$.（由于 φ 为局部同态知 $\varphi^{-1}(n)=m$）

考虑 φ 诱导的环同态 $A \longrightarrow B_{q_0}$. 由于 φ 为平坦知 $A \to B_{q_0}$ 也为平坦的局部同态，从而由性质3.(3)知存在 $p'_{k_1-1} \in \operatorname{Spec} B_{q_0}$，使得 $p'_{k_1-1} \cap A = p_{k_1-1}$.

继续考虑同态 $A_{p_{k_1-1}} \to B_{p'_{k_1-1}}$，可知存在 $p'_{k_1-2} \in \operatorname{Spec} B_{p'_{k_1-1}}$，使得 $p'_{k_1-2} \cap A_{p_{k_1-1}} = p_{k_1-2}$，依次下去得 B 中素理想链 $p'_0 \subsetneq p'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p'_{k_1-1} \subsetneq q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_{k_2} = n$

满足 $p'_i \cap A = p_i$，$\forall i=0,\cdots,k_1-1$. 故知 $\dim B \geq k_1+k_2$.

#

定义：设 $\varphi: X \to Y$ 为簇的态射. 称 φ 为平坦态射, 如果 $\forall x \in X$, 记 $y = \varphi(x)$, 则 φ 的拉回诱导的局部同态 $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 为平坦环同态.

性质5：态射 $\varphi: X \to Y$ 为平坦态射 $\Longleftrightarrow$

对任意 X 中仿射开集 $U = \mathrm{Specm}\, B$, Y 中仿射开集 $V = \mathrm{Specm}\, A$. 若 $\varphi(U) \subset V$, 则拉回同态 $A \to B$ 为平坦同态.

$\Longleftrightarrow$ 存在 X 的仿射开覆盖 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, 使得 $\forall i$, $\varphi|_{U_i}: U_i \to Y$ 为平坦态射

证：由性质2即得. #

性质6：设 $\varphi: X \to Y$ 为簇之间的平坦态射. 设 $x \in X$, $y = \varphi(x)$, 则有维数等式:

$$\dim \mathcal{O}_{Y,y} + \dim \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(y),x} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$$

证：由性质4即得

推论7：设 $\varphi: X \to Y$ 为不可约簇之间的 ~~dominant~~ 平坦态射.

~~则对任意 $y \in \varphi(X)$, 对任意~~

则 φ 为 dominant, 且 $\forall y \in \varphi(X)$, 对任意 $\varphi^{-1}(y)$ 的不可约分支 F, 有 $\dim Y + \dim F = \dim X$.

证：记 $Z=\overline{\varphi(X)}$，则 Z 为不可约簇。

~~如果~~ 由性质 6 知 任取 $y\in\varphi(X)$，任取 $\varphi^{-1}(y)$ 的不可约分支 F，有 ~~$\dim Y = \dim$~~ $\dim Y+\dim F=\dim X$.

如果 $\dim Z<\dim Y$，则对 dominant 态射 $\varphi: X\to Z$ 来说，就有 $\dim Z+\dim F<\dim Y+\dim F=\dim X$，这与维数的基本不等式矛盾！ #

对于光滑曲线间的态射来说，它们之间的有限态射均为平坦态射。

性质 8：设 $C_1\xrightarrow{\varphi}C_2$ 为不可约曲线之间的有限态射，并设 C_2 为光滑曲线，则 φ 为平坦态射。

证：显然 φ 为满射。$\forall x\in C_1$，设 $y=\varphi(x)$，则拉回同态 $\mathcal{O}_{C_2,y}\to\mathcal{O}_{C_1,x}$ 为整环之间的单同态。由于 $\mathcal{O}_{C_2,y}$ 为一维正则局部环，故其为 DVR（离散赋值环），记 t 为 $\mathcal{O}_{C_2,y}$ 的极大理想的生成元，则 $\mathcal{O}_{C_2,y}$ 中任一理想均形如 (t^n)，$n\geq 1$，为主理想。由于 $\mathcal{O}_{C_2,y}\to\mathcal{O}_{C_1,x}$ 为单同态，且 $\mathcal{O}_{C_1,x}$ 为整环，知 $\forall n\geq 1$，$\mathcal{O}_{C_1,x}\xrightarrow{t^n}\mathcal{O}_{C_1,x}$ 为单同态，由此

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_{C_1,x} & \xrightarrow{t^n} & \mathcal{O}_{C_1,x}\\ \Downarrow\!\!\!\!\in & & \Downarrow\!\!\!\!\in\\ \alpha & \longmapsto & t^n\cdot\alpha\end{array}$$

不难看出 $\forall n \geq 1$, $(t^n) \otimes_{\mathcal{O}_{C_2,y}} \mathcal{O}_{C_1,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{C_1,x}$ 为单同态

~~$\forall n \geq 1$~~.

再由性质1即知 $\mathcal{O}_{C_1,x}$ 为平坦 $\mathcal{O}_{C_2,y}$-模，即 φ 为平坦态射.

#

推论9：设 C_1, C_2 均为不可约射影曲线，且 C_2 为光滑曲线. $\varphi: C_1 \to C_2$ 为非常值态射，则 φ 为平坦态射.

证：由于不可约射影曲线间的非常值态射均为有限态射，从而可应用性质8得到所需结论.

#